Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского
Серия «Философия. Социология» Том 18 №2 (2005) 36-41

УДК 161.2

В.Н. Николко

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ КЛАССА ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Цель статьи – изложить основные исчисления современной логики на основе термина "функфор"; ее новизна предлагает обобщение пропозициональной функции в виде функфора

Поводом к написанию предлагаемой статьи послужила необходимость читать на философском факультете ТНУ им. В.И. Вернадского курс "Современная логика". Исторически на факультете сложился цикл преподавания логических дисциплин: традиционная логика (первый семестр первого курса), классическая логика (второй семестр), новейшие системы (XXI века) логики (третий семестр), история логики (четвертый семестр). Затем идут спецкурсы по логике.

По разнарядке первый раз читать курс третьего семестра выпало мне, до этого я пробовал читать "Элементы современной логики". Возникла сложнейшая проблема обобщения логики XX века.

Среди обстоятельств, характеризующих логику XX века, таких как: математизация, синтаксный (речевой) характер предмета, бинарность основных операций, - обращает на себя внимание ключевое явление этой логики – пропозициональные функции. Если убрать эти конструкции – рухнет все мощное здание логики XX века.

Можно было бы сказать больше, логика XX века – это запись всей совокупности логических знаний посредством пропозициональных функций. Впрочем, этого не скрывали и сами разработчики классической логики: синонимом теории высказываний является "пропозициональное исчисление", а исчисление предикатов вообще называется пропозициональной логикой (подробнее об этом в [1, с. 150-151]).

Все вводные части изданных в XX веке по математической логике учебных пособий содержат в какой-либо форме раздел по пропозициональным параметрам, функциональным связям, функциям.

Само явление пропозициональности как грамматического предложения, содержащего переменные, известно со времен Аристотеля. Термин "пропозициональная функция" введен, как утверждается в [2, с. 483], Б. Расселом.

Тезис о том, что логика – наука о пропозициональных функциях, устраивал всех. Это отличает логику от математики, так как области значения аргументов и функции – не числа, а термины и предложения. Это отличает логику от языкознания, так как речевыми конструкциями в форме пропозициональных переменных и функций языкознание не занимается. Пропозициональность функций, а именно, их значимость в форме "истины" и "лжи" позволяет оставить логику в зоне депсихологизации, очерченной Г. Фреге.

Что же такое пропозициональность? Название "пропозициональная" - функция, переменная, зависимость, происходит от латинского "propositio" – "предложение". Переменная пропозициональна, если область ее значений – предложения, высказывания, обычные имена естественных языков. Связь пропозициональна, если она установлена между множествами, элементами которых являются слова, предложения естественных или искусственных языков.

Пропозициональная функция, или функция высказывания – такая функция, область значений которой составляют истинностные значения ("истина" и "ложь") [там же]. Аналогично определяет пропозициональную функцию А.Черч: "Функция, область значений которой состоит исключительно из истинностных значений … называется пропозициональной функцией" [3, с. 33]. Примерами пропозициональных функций являются выражения:

"Такое x, квадрат которого (x^2) меньше y" (x и y принимают числовые значения из области M

$\sin x = 0$, $\sin x = 2$

$x^2+y^2=3xy$

$(x-y)<t$

если $(x-y)<t$, то $(\sin x - \sin y)<t$ и т.д.

Иногда, как это сделано у В.А.Бочарова и В.И.Маркина, то, что обычно называем пропозициональными функциями, выступает под именем функций истинности: возможными аргументами и значениями этих функций являются объекты "истина" и "ложь" [4, с. 38].

Вместе с тем, существует иное толкование пропозициональной функции. Оно связано с пониманием того, что пропозициональная функция, имея форму грамматического предложения, не является высказыванием, она не истинна и не ложна, но становится высказыванием, а значит истинной или ложной, при подстановке вместо переменных конкретных значений.

С мнением, выраженным в Кратком словаре по логике (под ред. Горского Д.П.), трудно не согласиться: действительно областью значений пропозициональных функций являются множества конкретных высказываний.

Анализ примеров пропозициональных функций, которые даны в современной литературе, показывает странную особенность этих функциональных образований: они, как функции, имеют по две области значений: множество { "истина"; "ложь"}и множества отдельных высказываний. В самом деле: "x –четное число" при подстановке вместо x цифры натурального ряда превращает функцию в отдельные высказывания: 1 – четное число, 2 – четное число, 3 – четное число и т.д. Вместе с тем, при указанных подстановках "x – четное число" становится истиной или ложью.

Таким образом, в случае пропозициональных функций мы сталкиваемся с особым типом функциональной зависимости, в которой функция имеет дело с двумя областями изменений. Существует возможность обобщения пропозициональных функций в указанном аспекте. Соответственно существует возможность переписать логику на базе данного обобщения. Ниже строится одно из таких обобщений.

Функцией будем называть действие, которое будучи применено к чему то как аргументу, дает некоторую вещь в качестве значения функции для данного аргумента. Вещи, к которым функция применима, составляют область определения или область значений аргумента функции. Вещи, которые получаются в результате применения функции – область изменения функций или область значения функции.

Обычна запись функции: пишут имя этой функции (используются буквы греческого алфавита) и приписывают справа от него имя аргумента (взятое в скобки). Получается так: f(x), ψ(x,y) и т.д. Удобна запись функции в виде равенства y = f(x) и т.д. Функции делятся на одинарные, бинарные, тернарные и т.д. (многозначные, в зависимости от числа аргументов).

Пусть имеется однозначная функция y=f(x) с областью определения M_1 и с областью значений M_2. Если к тому же при всяком значении x y принимает некоторое значение из M_2 и к тому же "мигает", т.е. принимает значение "1" или "0", то будем говорить, что мы имеем дело с функкфором. Функция, имеющая две области значений, одна из которых {0,1}или {0, ½, 1} и т.д., - функкфор. Области изменений функкфора (0,1), (0,1/2,1) и т.д. – будем называть областями мигания (отсюда и название "функкфор"). В зависимости от состава области мигания функкфоры бывают двузначными, трехзначными и т.д. Нетрудно видеть: пропозициональные функции – частный случай функкфоров. Построим другой пример функкфора. Пусть дана грамматическая конструкция – о – о – а. Вместо черточек можно подставлять любые буквы русского алфавита, в результате получаются слова русского языка, одни из которых будут именами, а другие - нет. Например:

дорога – корога – корова

морока – бобова – сорока и т.д.

В случае, если подстановка дает имя, будем считать, что предложенный функкфор имеет значение 1, а в противном случае - 0.

Можно построить примитивные, но важные, исчисления функкфоров.

Пусть имеется набор бинарных функкфоров (с областью мигания из 1 и 0):

A(x), B(y), C(xy) и т.д. Будем говорить, что XУ– сложный функкфор, если X, У – функкфоры. Других функкфоров привлекать не будем.

Функкфор назовем n – слоговым, если он состоит из n записанных в строчку функкфоров.

Пример: A(x)B(y)C(x,y) – трехслоговый, A(x)B(y) – двуслоговый и т.д.

Каждый функкфор идентифицируется соответствующей таблицей. Например, имеется функкфор A(x)B(y)C(xy). При некоторых значениях x, y A(x), B(y), C(xy) будут принимать значения из области мигания и собственной области изменений. Нас будет интересовать первое. Например, A(x) при x = a принимает значение 1, при x = b – значение 0 и т.д. B(y) при y = k принимает значение 0, при y = n – значение 1. C(xy) соответственно 0, 0 и т.д.

Тогда трехслоговый функфор A(x)B(y)C(xy) характеризуется матрица

1 0 0 (при x = a, y = k)

0 1 0 (при x = b, y = n) и т.д.

Назовем строчки предлагаемой матрицы *элемами*. Ясно, что матрица функфора A(x)B(y)C(xy) может содержать бесконечное число строк, но разных элемов – не более 2^3=8. Вот одна из теорем исчисления функфоров. Ясно, что иные элемы, кроме упомянутых 8-ми, – неинтересны и могут быть опущены.

Оставшиеся элемы образуют характеристическую матрицу, которая идентифицирует функфор. Аналогично, для двухслоговых функфоров: число различных элемов в их матрицах – не более 2^2 ; у четырехслоговых – не более 2^4 и т.д. (у n – слоговых – не более 2^n).

Соблазнительно изложить все содержание современной логики посредством функфоров. Оказывается это возможно: для записи всех ассиоматик силлогистики достаточно согласованных трех слоговых функфоров. Для записи классической логики – зависимых функфоров в рамках связанных и т.д.

Функфоры в n – слоговом функфоре назовем независимыми, если и только если характеристическая матрица последнего содержит 2^n различных элемов. В противном случае функфоры, составляющие n – слоговый функфор, - зависимы. Выделяются различные классы зависимостей, что и дает возможность охватить все многообразие существующих логик. Рассмотрим, к примеру, формы зависимостей функфоров в трехслоговых функфорных конструкциях.

Пусть имеется множество M трехслоговых функфоров, характеристические матрицы которых содержат не более 7-ми различных элемов. Выделим в M подмножество M′ функфоров, характеристические матрицы которых содержат только 4 строчки следующей структуры:

1 1 α_1

1 0 α_2

0 1 α_3

0 0 α_4.

Причем α_1, α_2, α_3, α_4 принимают независимо друг от друга значения 0 или 1. Иными словами, соберем в M′ такие трехслоговые функфоры, в которых первые два функфора (счет слева направо) были бы независимыми. Ясно, что третий функфор, характеризуемый столбцом α_1

α_2

α_3

α_4,

зависим от первых двух, связан первыми двумя. Нетрудно видеть, что возможны 16 видов связи функфоров в трехслоговых функфорах M′. Каждая связь идентифицируется соответствующей матрицей. Выпишем эти связи вместе с их матрицами в привычной для логиков форме.

1.	2.	3.	4.	9.	10.	11.	12.
$_{A}{}^{B}$	$_{A}{}^{B}$	$_{A}{}^{B}$	$_{A}{}^{B}$	$_{A}{}^{B}$	$_{A}{}^{B}$	$_{A}{}^{B}$	$_{A}{}^{B}$
1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1

5.	6.	7.	8.	13.	14.	15.	16.
$_{A}{}^{B}$	$_{A}{}^{B}$	$_{A}{}^{B}$	$_{A}{}^{B}$	$_{A}{}^{B}$	$_{A}{}^{B}$	$_{A}{}^{B}$	$_{A}{}^{B}$
1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0

Некоторые связи и их матрицы узнаваемы, а именно – 1, 12, 14, 9 известны в логической литературе как $\wedge$, $\rightarrow$, $\vee$, $\equiv$. Ясно, что после вышесказанного вопросы построения алгебр и исчислений высказываний, а также исчислений предикатов – чисто технические. Техническими оказываются вопросы построения многозначных логик.

Все виды силлогистик вполне выводимы в исчислении согласованных функторов.

Назовем трехслоговый функфор строго согласованным, если и только если в его матрице отсутствует элем 110, а все остальные – из 8, присутствуют. Определение: отрицанием функфора A(x) назовем такое A'(x), которое при данном x принимает значение 0, если A(x) принимает, мигая, - 1 и наоборот.

Пусть имеется строго согласованный трехслоговый функфор ABC, и есть A', B', C'. Тогда имеет место теорема: если ABC – строго согласованный функфор, то строго согласованными являются BAC, C'B'A', AC'B', C'AB', BC'A'. Набор трехслоговых строго согласованных функфоров ABC, BAC, C'BA', C'AB', BC'A' – назовем ю-группой. Таким образом, трехслоговые строго согласованные функфоры разбиваются на отдельные ю-группы.

Фактически я изложил теорию правильных силлогизмов в аристотелевском смысле. Осталось показать что A_{sp}, E_{sp}, O_{sp}, I_{sp} – функфоры, а модус *Barbara* (A_{mp} A_{sm} A_{sp}), как, впрочем, *Celarent* и другие правильные модусы – строго согласованные. Но это я оставляю читателю.

Список литературы

1. Введение в математическую логику. – М.: Иностр.литература, 1960. – 442 с.
2. Кондаков Н.И. Логический словарь-справочник. – М.: Наука, 1975. – 1729 с.
3. Черч А. Введение в математическую логику. – М.: Иностр.литература, 1960. – 637 с.
4. Бочаров В.А., Маркин В.И. Основы логики. Учебник. – М.: Инфа-М., 2000. – 359 с.
5. Краткий словарь по логике. – М.: Просвещение, 1991. – 208 с.

Поступило в редакцию 18.06.2005