Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского
Серия «Философия. Социология» Том 18 №2 (2005) 19-35

УДК 165.172

М.М. Новосёлов

АРГУМЕНТЫ ОТ АБСТРАКЦИИ И ПАРАДОКСЫ
(интервальный подход)

Мысли могут восприниматься, но мыслитель — нет;
он — часть ненужного метафизического хлама.
Бертран Рассел

ВВЕДЕНИЕ

Я думаю, что ни одна философская концепция не может претендовать на её доказуемость, хотя бы потому, что реальная жизнеспособность философских идей вообще коренится исключительно в поле многочисленных ***Pro*** и ***Contra***. Правда, коренится она только тогда, когда для ***Contra*** имеется реальная возможность преодолеть ***Pro*** с более высокой точки зрения, вникнув в сильную сторону ***Pro*** и поставив себя в сферу действия этой силы. А это означает, что заслуживающие внимания философские концепции не только не доказуемы, но и не опровержимы в классическом логическом смысле термина «опровержение». Их отрицание не подпадает под действие *tertium non datur*, поскольку оно никогда «не должно идти извне, т.е. не должно исходить из допущений, которые находятся вне опровергаемой системы и которым она не соответствует». [1, с. 13]

Следовательно, в сфере философских идей проблема обоснования ставится иначе, чем в логике. Она не исключает задач на доказательство. Но в философии акцент переносят на аргументацию в её широком (экзотерическом) смысле, когда объекты дискурса и средства аргументации, вообще говоря, не ограничены условиями на доказательство и не фиксированы в виде правил, а могут быть любыми. В частности, аргументы здесь могут подчиняться эпистемологическим, психологическим или прагматическим целям и носить квази-логический характер.

Хотя названные аспекты обычно лежат в одной плоскости, их пересечения бывают порой драматичны. Например, как ни сильна была в научном смысле аргументация Галилея в защиту учения Коперника, но она оказалась бессильной перед философскими аргументами доминиканских иезуитов.

Из одного этого примера видно, что аргументация в широком смысле выходит не только далеко за границы логики (не исключая, впрочем, и логических аргументов при субъективном формировании посылок, как это было в случае суда над Галилеем), но и за границы доверительного отношения к фактам. Этот же пример говорит и о том, что никакой свод правильных аргументов, утверждённый наукой об аргументации, не сможет обеспечить защиту истины, если эта истина противоречит господствующей социальной доктрине или предрассудкам толпы. Иными словами, экзотерический аспект аргументации (в отличие от эзотерического) предполагает анализ социального окружения (контекста) любого аргументативного процесса.

Стоит сказать, что и собственно логический аспект обоснования не сводится к анализу аргументов, поставляемых (допускаемых) одной лишь формальной логикой. История науки — это постоянное рождение (и зарождение) новых идей, что нередко приводит к революционном преобразованиям в дискурсе и к коллизии (противоречию) мнений. А противоречивый дискурс требует рассуждений, составляющих прерогативу диалектической мысли в этимологическом значении слова «диалектика», а именно в смысле искусства вести беседу. Это та область дискурса, которую Башляр назвал «философией нет» — методология прояснения (и решения) вопросов посредством свободного диалога. А в этой области, как кажется, нет абсолютных границ между допустимыми и недопустимыми способами рассуждений, если не иметь в виду тавтологий.

Но чтобы судить о характере противоречий (о ***Pro*** и ***Contra***) в дискурсе, необходимо располагать знанием о средствах, позволяющих получать эти противоречия и более того — знанием о достижимости противоречия этими средствами. А это говорит о том, что наиболее глубокая трактовка непротиворечивости должна не только утверждать принципиальную недопустимость противоречий, но и связывать вопрос о непротиворечивости с вопросом о допустимых способах аргументации.

С учётом этих соображений и выполнена данная работа.

АБСТРАКЦИЯ ИНДИВИДУАЦИИ И ПАРАДОКС РИШАРА

Не секрет, что онтологический универсум чистой математической теории даётся не от природы, а создаётся какой-либо абстракцией, дополненной столь же абстрактной «конструкцией» его элементов. К примеру, полагая понятие множества в основу идеи континуума, подразумевают, что вопрос об индивидуации элементов множества заведомо разрешён в том смысле, что все элементы множеств как-то определены «индивидуальным образом», что целое — множество — «возникает» из его индивидуализированных элементов в мысленном акте их объединения (аксиома свёртывания) и что всякое множество однозначно определяется его элементами (аксиома объёмности).

Между тем, во многих математически важных случаях индивидуация элементов универсума или его частей и их элементов — это глубокая и трудная проблема. Поэтому, не затрудняя себя анализом, её просто берут как предпосылку, как исходную абстракцию, как постулат математических рассуждений. А таким путём, вообще говоря, трудно избежать противоречий. Об этом можно судить хотя бы по известному рассуждению Жюля Ришара, приводящему к парадоксу, названному его именем. Этот парадокс особенно выделял Пуанкаре, усматривая в нём яркий пример порочности теоретико-множественных непредикативных определений.

Я не буду касаться этой стороны вопроса. Меня интересует здесь другая, семантическая его сторона, его связь с понятием семантической определимости и, соответственно, с той ролью, которую в содержании этого парадокса играют абстракции онтологической и гносеологической индивидуации [2].

Описание парадокса Ришара можно найти в любом солидном учебнике по математической логике или теории множеств [3], [4], [5]. Но эти описания слишком лаконичны, чтобы уловить в них причастность к проблемам абстракции. Поэтому я воспользуюсь изложением собственных рассуждений Ришара, наиболее пригодных для моих целей.

Рассуждение Ришара начинается с финитной постановки вопроса об определимости вещественных чисел, для чего используется счётно-бесконечное множество слов в некотором конечном алфавите. Для начала предлагается рассмотреть некоторое множество (таблицу) размещений с повторениями, составленных из букв данного алфавита и упорядоченных в лексикографическом порядке. Сначала берутся все размещения по два, затем по три, по четыре и т.д. Таким образом, каково бы не было число p всякое размещение из букв алфавита по p окажется в этой таблице. И так как всё то, что можно описать с помощью конечного числа слов есть некое буквенное размещение, то всё, определимое словами, будет представлено в нашей таблице.

Очевидно, что хотя в таблицу будут входить и бессмысленные сочетания слов, в нём будет также представлено словами всё, что может быть осмысленно высказано с помощью конечного множества слов, в том числе и счётное множество определений всех конечно определимых вещественных чисел. Следовательно, некоторые из размещений таблицы будут определять числа. Выбросим из таблицы все те размещения, которые чисел не определяют. Оставшееся множество назовём множеством $\boldsymbol{E}$.

Эта оставшаяся часть будет естественно упорядочена в счётную последовательность конечно определимых вещественных чисел. Иначе говоря, кажется, что все конечно определимые числа образуют счётное множество.

Вот, однако, в чём парадокс. Можно записать число, которое не входит в это множество.

«Пусть p будет n-ой десятичной цифрой n-го десятичного числа из множества $\boldsymbol{E}$. Образуем число, целая часть которого будет равна нулю, а n-я цифра $p + 1$, если p не равно восьми или девяти; в противном случае положим, что эта цифра равна единице».

Группу слов, заключённых в кавычки, обозначим буквой **G**.

Число N, определённое этой конечной группой слов, по предположению, должно принадлежать множеству $\boldsymbol{E}$. Но если бы оно было n-ым числом множества $\boldsymbol{E}$, то его n-я цифра была бы n-ой десятичной цифрой этого числа. А это, однако, не так. Следовательно, оно ему не принадлежит. Таково полученное противоречие.

Замечу, что рассуждение, приводящее к парадоксу, предполагает онтологическую индивидуацию всех точек числового континуума и в этом смысле априорную информацию о каждой из этих точек. Ведь, не зная наперёд всех элементов континуума, мы не сможем ответить на вопрос, какое из словосочетаний из $\boldsymbol{E}$ является определением вещественного числа, а какое нет. А без этого невозможно вычеркнуть все посторонние словосочетания из $\boldsymbol{E}$. Иначе говоря, условие парадокса (и, на мой взгляд, это весьма важный момент!) предполагает заведомое знание вещественных чисел «самих по себе», поскольку процесс вычеркивания посторонних словосочетаний предполагает идентификацию вещественного числа с его описательным определением, а «идентифицировать можно лишь то, что уже известно» [6, с. 14].

Таким образом, первой эпистемологической предпосылкой парадокса Ришара является абстракция онтологической индивидуации вещественных чисел. Решая задачу о составлении последовательности всех конечно определимых вещественных чисел, мы должны допустить что понятие «множество всех вещественных чисел» имеет смысл, независимый от возможности их гносеологической характеризации всех его элементов.

Но допустим, что процедура вычеркивания разрешима, что мы обладаем своего рода алгоритмом, позволяющим «просеять» все те буквенные размещения (из множества слов), которые не определяют вещественных чисел. Можем ли мы в этом случае с полной уверенностью сказать, что в результате процедуры просеивания (вычеркивания посторонних словосочетаний) получается последовательность всех определимых вещественных чисел? Построение вещественного числа, конечно определимого, но не входящего в эту последовательность (а в этом-то и состоит парадокс) даёт отрицательный ответ. И, как заметил уже сам Ришар, это немедленно наводит на мысль, что процедура вычеркивания (просеивания) не является эффективной (алгоритмически разрешимой), так что множество ***E***, получаемое в результате вычёркивания, не является вполне определённым (перечислимым) множеством [7, с. 296]. Следовательно, если мы откажемся от абстракции онтологической индивидуации, характерной для теоретико-множественной позиции, парадокс исчезает (является только кажущимся).

Идея проводить существенное различие между понятием эффективной перечислимости (предполагающей возможность гносеологической индивидуации) и классическим понятием счётности принадлежит Борелю. И всё же Борель не исключал индивидуацию элементов в классически счётных множествах, хотя, по-видимому, не слишком ценил такую индивидуацию в виду её трансцендентного характера. Зато с понятием эффективной перечислимости он связывал своеобразный «принцип наблюдаемости». Преимущество этого понятия он усматривал в том, что оно менее метафизично, поскольку опирается исключительно на наблюдаемую реальность [8].

Тем не менее, Борель не выделяет гносеологическую индивидуацию в связи с этой наблюдаемой реальностью, как и вообще не делает различия между онтологической и гносеологической индивидуацией. И всё же путь к понятию «вычислимых точек» континуума был им намечен.

Следует, правда, заметить, что в наглядном созерцании геометрический континуум однороден. Все его точки «тождественны (в смысле Лейбница — *М.Н.*), так как они все имеют одни и те же свойства» [9, с. 264] . Мы разрушаем эту однородность двояким образом. С одной стороны, мы вводим порядок как внешнее свойство самого множества. С другой стороны, арифметизируя его, мы фактически переходим к другому пониманию континуума: мы вводим систему координат, индивидуализируя (как нам кажется) геометрические точки относительно этой системы координат. Это, конечно, внешняя индивидуация, а не внутренняя (по внутренним свойствам самой точки). Поэтому неудивительно, что такой внешней индивидуации поддаются не все точки геометрического континуума, хотя мы и считаем (заведомо идеализируя положение вещей), что соответствие между множеством всех точек геометрического континуума и множеством их арифметических образов взаимно однозначно. Но если мы освободимся от известных классических идеализаций, то сейчас же обнаружим, что «в геометрическом континууме имеются точки, которые не допускают никакого арифметического или аналитического изображения» [9, с. 264]. И таких точек даже больше, чем тех, что мы можем внешним образом индивидуализировать. Из таких точек можно образовать класс, который уже не будет множеством в смысле Кантора. Примером могут служить проективные множества, элементы которых не только нельзя индивидуализировать, но нельзя даже установить их существование.

Хотя абстракция онтологической индивидуации не обеспечивается эффективным методом её проверки, все же исключить её из практики математического мышления, по-видимому, невозможно. Ограничения, связанные с использованием абстракции гносеологической индивидуации, являются большими, чем это может показаться на первый взгляд. Теперь очевидно, что даже в конструктивном вещественном континууме онтологическая индивидуация неизбежна, поскольку, проблема разрешения для вопроса о равенстве или неравенстве его вычислимых точек (к чему собственно и сводится их гносеологическая индивидуация) является неразрешимой [10, с. 48-52].

Следовательно, проводить различие между онтологической индивидуацией и гносеологической необходимо и в математике. И это различие должно быть связано с тем смыслом, который мы придаем в ней глаголу «существовать». Гносеологическая индивидуация подразумевает конструктивный смысл существования объектов, эффективную осуществимость их сравнения. Онтологическая индивидуация, напротив, довольствуется классическим смыслом глагола существовать, связанным с принципом исключённого третьего, и предпосылкой о сравнимости объектов «самих по себе» или «в себе», поскольку смысл существования в этом случае полностью совпадает с той ролью, которой мы наделяем кванторы в классической логике. Именно в этом случае принято говорить, что математическая реальность существует «сама по себе», хотя по отношению к таким абстрактным объектам, как, например, точки, прямые, плоскости и пр., сама идея такого существования представляется вряд ли приемлемой. Всё дело в том, что логика выясняет вопросы существования в их относительном смысле, привязывая свои ответы на них к определенным способам рассуждения, к тем или иным способам задания объектов универсума, или, как говорит Н.Н. Лузин, — к полю законов, «по отношению к которому констатируются "существование" и "несуществование" математических объектов» [9, с. 441], [11]. Перенос этого смысла на область философской онтологии не является делом логики. Считать ли классическую логику «логикой бытия», а конструктивную «логикой знания» — это вопрос философии, вопрос гносеологической установки. И в том, и в другом случае система объектов математической теории, применяющей логику, будет определяться характером соответствующей логики, то есть чисто математическая реальность, а следовательно, и вопросы существования и индивидуации в ней будут зависеть от законов и правил этой логики.

АБСТРАЦИЯ ТОЖДЕСТВА И ПАРАДОКСЫ МОДАЛЬНОСТИ

Содержание этого параграфа спровоцировано, с одной стороны, модальными парадоксами тождества, с другой — тенденцией, ставить под сомнение его абсолютный характер. При этом, как правило, игнорируется методологически важное требование отличать ***понятие тождества*** от ***суждений тождества***. Понятие тождества априорно. Это аналитическая абстракция. Суждение тождества апостериорно. Это синтетическая абстракция — суждение, основанное либо на абстракции отождествления, либо на абстракции неразличимости.

Смысл тождества как понятия даётся определением. И тем же определением очерчивается «область его значимости», создаются условия для суждений о тождестве и распознавания (узнавания) тождества. Это обстоятельство нельзя не учитывать при построении гибридных логических исчислений, например, в тех случаях, когда мы расширяем чистую элементарную логику за счёт нелогических постулатов, содержащих символ тождества. Такое расширение, на первый взгляд вполне естественное, может, однако, приводить, к парадоксам тождества, и, следовательно, к дискредитации классического понятия тождества.

Если мы будем держаться указанных различений, то парадоксы эти кажущиеся. Они возникают оттого, что понятие о тождестве подменяют суждением о тождестве, основанном на других абстракциях нежели те, что принимались в расчёт при определении понятия тождества. Кажется, что все известные «парадоксальные» примеры случайных отождествлений имеют характер таких суждений, которые берутся не из мира чистой логики, а из мира каких-либо фактических ситуаций. Применяемые в этих случаях абстракции позволяют отвечать на вопрос о тождественности тех или иных объектов для данного случая и при данных условиях. Но только понятие о «тождестве самом по себе» способно дать нам общий критерий тождественности, даже если не всегда, как говорил Фреге, в наших силах установить, применим ли этот критерий.

Известно, что такой общий критерий был сформулирован в первом приближении Аристотелем, а затем уточнён Лейбницем. Только этот критерий даёт нам исключительное право на категорические суждения о тождестве. В чистой элементарной логике этот общий критерий представлен аксиомами 1) $\boldsymbol{x = x}$ (индивидуация, или абстракция постоянства) и 2) $\boldsymbol{x = y} \supset (\mathbf{A}(\boldsymbol{x}) \supset \mathbf{A}(\boldsymbol{y}))$ (принцип подстановочности), в которых используются не фиксированные предикаты, а нарицательные имена для предикатов и равным образом нарицательные имена для индивидов. Таким образом, это аксиомы, заданные «ни на чём» [12, с. 27]. Совместно с общей логикой они определяют формальный смысл тождества, пригодный en bloc для тех моделей, сигнатура которых совпадает с сигнатурой чистой теории тождества.

Но когда, мы меняем сигнатуру теории. Например, когда мы модализируем суждения, мы по существу меняем и смысл тождества. Логический смысл тождества не зависит от актов отождествлений, он контекстно свободен.

Модализированный смысл тождества контекстно зависим. Подставляя $\Box\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{t}$ в аксиому 2), мы поступаем аналогично тому, как это делается в любом прикладном случае, где всякое доказуемое выражение вида $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ представляет собой суждение об отождествлении, допустимое в силу абстракций теории. Именно эти абстракции позволяют смотреть на различные, вообще говоря, объекты как на «один и тот же» объект. При этом, конечно, мы всякий раз обязаны уточнять интервал абстракции отождествления, предъявляя достаточные основания для выражения «один и тот же», и, соответственно, уточнять выбор подходящей интерпретации для оператора необходимости.

Суждение $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ логически истинно, только если его необходимое условие, а именно формула $\mathbf{A}(\boldsymbol{a}) \supset \mathbf{A}(\boldsymbol{b})$, общезначима. А она общезначима только в одноэлементной области. Следовательно, согласно 1), формула $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \supset \Box\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ теряет парадоксальный характер, когда за тождеством сохраняют его исходный логический смысл. Контрапозиция этой формулы, а именно формула $\neg \Box\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \supset \neg\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$**,** прямо говорит об этом: случайное тождество не является тождеством в смысле аксиом 1) и 2).

Разумеется, возможны и случайные отождествления. Но, вообще говоря, случайность — это выражение нерегулярности явления из ряда явлений, регулярность которых обусловлена законом. Обычно это отклонение от закона, а не уклонение от него. В понятии «абстракция отождествления» не содержится условий, ограничивающих свободу отождествлений и даже произвол отождествлений. Поэтому слово «случайный» здесь может означать и «произвольный», и «свободно принятый». Но если правила таковы, что всё принятое необходимо исполнять, принятое случайно становится необходимым, и парадокс, таким образом, разрешается.

Любопытно в этой связи посмотреть, что говорит о себе модализированная аксиома 2).

$\vdash \Box\, (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \supset (\,\mathbf{A}(\boldsymbol{x}) \supset \mathbf{A}(\boldsymbol{y})))$; правило: Если $\vdash$ P, то $\vdash \Box$ P.

$\vdash \Box\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \supset \Box\, (\,\mathbf{A}(\boldsymbol{x}) \supset \mathbf{A}(\boldsymbol{y}))$; дистрибутивность $\Box$.

$\vdash \neg \Box\, (\,\mathbf{A}(\boldsymbol{x}) \supset \mathbf{A}(\boldsymbol{y})) \supset \neg \Box\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$; контрапозиция 2.

Если необходимое для логического тождества условие соблюдено случайно, то и тождество следует считать случайным. Здесь важно, однако, что необходимое условие всё-таки соблюдено. Поэтому случайность здесь будет только внешним обстоятельством, не влияющим на необходимый (логический) характер тождества. Иными словами, бывают случайные отождествления, но не бывает случайных тождеств. Об этом и говорит нам следующий вывод:

2.1. $\vdash \Box\, (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \supset (\,\mathbf{A}(\boldsymbol{x}) \supset \mathbf{A}(\boldsymbol{y})))$; аналогично 1.1.

2.2. $\vdash \Box\, (\,\neg\, (\,\mathbf{A}(\boldsymbol{x}) \supset \mathbf{A}(\boldsymbol{y})) \supset \neg\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y})$; контрапозиция 2.1.

2.3. $\vdash \Box \neg\, (\,\mathbf{A}(\boldsymbol{x}) \supset \mathbf{A}(\boldsymbol{y})) \supset \Box \neg\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$; дистрибутивность $\Box$.

Если невозможно выполнить необходимое условие для логического тождества, то и тождество (но не отождествление) невозможно.

Очевидно, что в модальной логике имеет место расширение или изменение наших представлений об истинности. И формализация не может не отражать этих расширений или изменений. При этом кажется, что «неясный инстинкт, который руководит нами при решении вопроса» о модальностях оставляет нам достаточно степеней свободы для толкования модальных операторов.

Что же касается собственно тождества, то следует иметь в виду, что в определении предиката тождества мы обычно ограничиваемся необходимым условием, которое выражается аксиомой подстановочности $x = y \supset (\mathbf{A}(x) \supset \mathbf{A}(y))$. И весь вопрос в том, как толковать эту необходимость. А её можно толковать так, что тождество сведётся к абсолютной индивидуации в смысле тождества вещей по Фреге, то есть к формуле $x = x$. Это логическая необходимость. Но можно допустить и «отождествление одинаковых» в смысле абстракции отождествления, когда не все свойства объектов принимаются во внимание. Это фактическая необходимость.

Например, когда мы присоединяем аксиомы тождества к аксиомам какой-либо теории, мы тем самым задаём запас признаков, по которым необходима подстановочность, чтобы выполнялось тождество. Иначе говоря, мы фиксируем интервал абстракции отождествления, внутри которого (и только внутри которого!) необходимость во втором указанном выше смысле (фактическая необходимость) сводится к необходимости в первом смысле (к логической необходимости). При этом естественно парадокс исчезает. В формальной арифметике (в интервале её основных абстракций) доказуемость равенства «2 + 2 = 4» по существу равносильна необходимости этого равенства. Но вне этого интервала, например при сложении неаддитивных величин, такой необходимости, вообще говоря, нет.

Теперь я остановлюсь на толковании модальности «необходимость», которое восходит к Лейбницу, но пока не принято в известных системах модальной логики.

Решая апорию, связанною с предопределённостью «поведения» монады и предустановленной гармонией, с одной стороны, и человеческой свободой воли, с другой, Лейбниц обращается к толкованию необходимости. И аналогично тому, как он разделил все истины на истины разума и истины факта, Лейбниц делит необходимости на два вида:

— логические (или абсолютные) необходимости;

— фактические (или случайные) необходимости.

Таким образом, если бы нам вздумалось строить модальную систему à la Leibniz, нам пришлось бы вводить два модальных оператора необходимости.

Что же понимал Лейбниц под каждым из этих операторов?

Логическая необходимость абсолютна в том смысле, что она самодостаточна, не зависит ни от каких условий или гипотез. Она основана на одних «чистых идеях» и «чистом» разуме Бога. С логической истиной она соотносится так, что противоположное ей логически противоречиво. Все логические истины логически необходимы, хотя обратное и не утверждается.

Фактическая необходимость всегда относительна: она зависит от определённых условий, например, от свободных решений Бога или от хода каких-то других событий. Отрицание фактической необходимости возможно, хотя по условию (определённому некоторым образом) противоположное фактической необходимости не может произойти. Понятно, что оператор фактической необходимости и оператор возможности, вообще говоря, не совпадают. Возможно всё, что непротиворечиво, но и противоположное чему возможно. Но «ничто, противоположное чему возможно, не заключает в себе необходимости» [13, с. 68]. В этом смысле рядовые фактические истины случайны и зависят от опыта. Это истины a posteriori. Напротив, и логическая, и фактическая необходимость не зависят от опыта. Это истины a priori. И для той и для другой невозможно противоположное. Можно предположить, что Кант в своей классификации суждений заимствовал эти идеи Лейбница, изменив лишь терминологию.

Вопрос о том, существуют ли вообще абсолютные необходимости, о которых говорит Лейбниц, я оставляю в стороне. На время можно согласится с тем, что идея такой необходимости вполне выражается универсальной общезначимостью логических истин. Очевидно, почему в логической общезначимости воплощается традиционное философское представление об aeternae veritates. Говоря о «всех возможных мирах», Лейбниц имел в виду любой **логически возможный** (мыслимый непротиворечивым образом) порядок вещей. Следовательно, истинное во всех возможных мирах абсолютно не зависит от опыта, в частности, и от тех фактических истин, к которым мы привыкли. Если бы эти фактические истины в один «прекрасный день» перестали быть истинами, если бы порядок вещей нашего мира изменился так, что некоторые (или даже все) законы природы перестали определять привычный нам мировой порядок, логическая общезначимость осталась бы инвариантна к такому «мировому беспорядку», законы логики сохранили бы свою роль законов. При этом, конечно, они остались бы такими лишь при условии, что не произошло изменений в интерпретации логических констант. Последняя оговорка вполне современна и во времена Лейбница, естественно, не подразумевалась.

Теперь я позволю себе несколько эксплицировать (разъяснить) различие между логической и фактической необходимостью. Возможно, это будет не совсем в духе Лейбница, но это будет в духе интервального подхода. Я имею в виду тот связанный с модальностью тождества вариант, который обсуждался выше.

Прежде всего, Лейбниц сам указывает на необходимый характер тождества: «Существуют два принципа знания необходимых и, по моему мнению, не зависящих от опыта истин: определения и аксиомы тождества» [14, с. 627]. Остаётся только выяснить, к какому виду необходимости они относятся. Но в любом случае мы должны признать, что если имеет место тождество, то оно необходимо.

И вот здесь следует различить тождество, которое определяется «чистыми» аксиомами тождества, когда суждение, представленное формулой $a = b$ логически, а не фактически истинно, и тождество, которое определяется в силу определённых условий, накладываемых на факты отождествлений. При этом вовсе не обязательно, чтобы это был случай опытных истин. Например, тождество 2 + 2 = 4 вовсе не является опытной истиной, по крайней мере, в рамках чистой арифметики. Здесь такого рода тождества не берутся из опыта, а выводятся на основе аксиом и определений, то есть соответствуют истинам, которые Лейбниц относит к необходимым [1].

В этих случаях я говорю о **необходимости в силу абстракций** теории. Это относительная необходимость в смысле Лейбница. Однако в интервале абстракций теории её можно считать абсолютной, поскольку здесь противоположное ей не может произойти по условиям самой теории, хотя вне этого интервала её отрицание возможно. Известный пример — сложение неаддитивных величин.

Напротив, абсолютное тождество чистой логики внеинтервально, а потому оно не имеет исключений. Понятие абсолютного тождества сводится к понятию индивидуальной субстанции (по Лейбницу), а «понятие индивидуальной субстанции раз навсегда заключает в себе всё, что может когда-либо произойти с ней» [15, с. 65].

Если брать необходимость в её абсолютном смысле (как имманентную, по терминологии Гегеля), то в этом и только в этом смысле можно согласиться с утверждением Лейбница, что «все необходимые истины потенциально являются истинами тождества» [14, с. 627], то есть они аналитичны. Что же касается его относительных (фактических) необходимостей, то они, вообще говоря, синтетичны, но синтетичны a priori. Таковы, например, законы природы (физические законы «нашего мира»). Для уточнения их смысла требуется, видимо, более тонкий анализ, чем тот, который может дать логика.

В недавнем прошлом А.С. Есенин-Вольпин заметил, что в известных модальных теориях «игнорируется зависимость значения модальных предложений от той ситуации или действительности, к которой они относятся» [16, с. 58], и предпринял построение теории модальностей, формализующей такую зависимость. Я думаю, что это именно тот шаг, который требуется и для уточнения лейбницевской относительной (фактической) необходимости. Важно лишь при анализе самих ситуаций сохранять интервальный взгляд «внутри» и «снаружи», чтобы избежать смешения понятий, когда прежний смысл в новой ситуации не наследуется. На примере арифметически необходимых истин видно, что фактическая (относительная) истина может быть необходимой «внутри» определённой ситуации и не быть такой «вне» этой ситуации.

АБСТРАКЦИЯ МНОЖЕСТВА И ПАРАДОКС РАССЕЛА

Многочисленные решения (избавления от) парадокса Рассела хорошо известны. Однако я предлагаю здесь свой (ещё не рассмотренный) аргумент, позволяющий достичь той же цели путём использования естественной логической модели, основанной на абстракции множества. Размышления, представленные в этом параграфе имеют преимущественно философский характер и не слишком вторгаются в технику вопроса, за исключением формализации одного пункта в подходе к понятию множества, который до сих пор оставался не уточнённым. Идея этой формализации опирается на принципы философского платонизма. Этим я не

[1] Доказательство таких истин нуждается в аксиоме полной индукции, которая сама (согласно Пуанкаре) является синтетической истиной a priori.

хочу сказать, что сам разделяю платонистскую концепцию математики. Однако любая точка зрения нуждается в последовательном развитии.

Решающим фактором возрождения платонистской темы универсалий внутри математической науки явилась, конечно, интуитивная (или, как ещё говорят, наивная) теория множеств, поскольку в ней множества рассматривались как универсалии, в которых «воедино связаны множественность и многообразие единиц» [17, с. 270]. При этом универсалия «множество» вводилась, по существу, как философская сущность, давая естественный повод к тому, чтобы считать понятие «множество» доматематическим (Г.Вейль) или, во всяком случае, не математическим понятием, хотя все другие понятия математики, в том числе и понятия анализа, определялись на основе этой универсалии.

Несмотря на первые математические успехи теории множеств присутствие философской категории в основании такой строгой науки как математика требовало, в свою очередь, обоснования. Это, конечно, понимал и сам Кантор. Но поскольку его исследования шли только в русле «числовых множеств» (как финитных, так и трансфинитных), вопрос о неограниченной интуитивной общности этого понятия до поры до времени не ставился, хотя абстракция актуальной бесконечности сомнению, действительно, подвергалась.

В этой ситуации первым свидетельством неблагополучия в области «интуитивной общности» таких понятий, как множество (совокупность, класс) и одновременно самой классической логики, которой пользовался Кантор в своих доказательствах, стал парадокс Рассела. Принято считать, что «Бертран Рассел построил этот парадокс, оставаясь исключительно в рамках элементарной логики» [18, с. 7].

Видимо, так считал и сам Рассел, о чём свидетельствует его ранние полемические статьи в защиту логистики от тогда уже острых, если не сказать ядовитых (после появления ряда парадоксов) высказываний Пуанкаре. Не случайно расселовский парадокс был поначалу истолкован в терминах логики и адресован не канторовской теории, а логике Фреге, которую в математических кругах знали гораздо меньше.

Чуть позже Рассел пояснит задачу, которая сложилась под влиянием открытого им парадокса. Она, скажет Рассел, единственно в том, чтобы исследовать принципы, употребляемые в обычной математике. Её целью является, во-первых, открыть эти принципы, во-вторых, показать, что обычная математика вытекает из этих принципов дедуктивным путём, а также, в-третьих, извлечь отсюда все иные следствия, которые могут представлять интерес. В этом третьем пункте логика как раз и входит в соприкосновение с канторовской теорией множеств и с парадоксами (противоречиями) этой теории [19, с. 632].

Не знаю кто, но расселовскую программу по решению этой задачи назвали затем логицизмом, а философию, соответствующую этой методологической программе, сам Рассел назвал аналитическим реализмом.

Это обстоятельство даёт мне некоторое право вернуться к философскому смыслу понятия «множество». Не секрет, что с первых опытов аксиоматизации канторовской теории смысл понятия множества тесно связали с принципом свёртывания (или, иначе, — с аксиомой свёртывания), который предполагает:

во-первых, — наличие «множественности» каких-либо объектов;

во-вторых, — наличие некоторых характеристических свойств, которые бы выделяли объекты множественности;

в третьих, — возможность мыслить множественность как множество, то есть как некую онтологически самостоятельную сущность, элементы которой «срастаются... в органическое единое целое» [17, с. 269], и которая поэтому уже сама может быть элементом какой-либо множественности или множества. Этот последний акт преобразования множественности в множество называют «свёртыванием». Принято считать, что именно акт свёртывания даёт основу для появления парадоксов теории множеств, одним из которых (возможно самым ярким) является парадокс Рассела (1902).

Посмотрим на эту философскую тему подробнее.

Заметим, что стандартный список аксиом теории множеств подразумевает по существу два различных подхода к понятию множества — интенсиональный (характеризуемый принципом свёртывания), когда множество задаётся характеристическим свойством (признаком) элементов множественности, и экстенсиональный (характеризуемый принципом объёмности), когда множество определяется списочным составом его элементов. Первый подход обычно определяют как платонистский, второй — как номиналистский, хотя в обоих случаях сохраняется взгляд на множество как на некую «единую вещь саму по себе» [17, с. 269]. По замечанию И.И.Жегалкина, «переход от множественности вещей к множеству их даёт нам пример творческой способности нашей создавать (курсив мой — *М.Н.*) вещи» [20, с. 3].

Навешивание философских ярлыков здесь не случайно. Однако рискну предположить, что не интенсиональная характеристика придаёт понятию множества платонистскую окраску, а именно экстенсиональная, — самый акт перехода от интуитивно ясного эмпирического факта множественности вещей, как набора значений характеристической функции P(x), к множеству как единой вещи, которая уже ни в каком смысле не является эмпирическим фактом и потому (вопреки весьма распространённому мнению) не может быть проиллюстрирована на примере.

В самом деле, в случае интенсиональной трактовки о множестве можно говорить как об общем понятии, не выходя за рамки номинализма. Здесь слово «все» имеет дистрибутивный смысл и равносильно слову «каждый». В случае экстенсиональной трактовки о понятии множества говорится уже в собирательном смысле. В этом случае термин, определяющий множество, представляется как термин, определяющий единичную вещь. Так, когда мы характеризуем множественность деревьев понятием «лес», свойства последнего уже не относятся к отдельным деревьям, составляющим лес. И только такое собирательное толкование, думается мне, аутентично платонизму [21].

Известно, что платонистский подход не устраивал Рассела. В неограниченном умножении сущностей, подобных платонистским классам, он видел источник противоречий. «Тезис теории не-классов (no classes theory), — говорит он, —

состоит в том, что всякое значащее предложение, касающееся классов, можно рассматривать как предложение, относящееся ко всем или некоторым их элементам, то есть к терминам, которые удовлетворяют некой пропозициональной функции φx (и, следовательно, не в собирательном смысле — *М.Н.*). Я обнаружил, что единственными предложениями, относящимися к классам, которые не могут рассматриваться таким образом, являются предложения типа тех, что порождают противоречия» [19, с. 636].

Посмотрим, однако, на эту проблему со стороны настоящих платоников. Чтобы не быть голословным, я приведу три коротенькие цитаты из Прокла: «всякое множество тем или иным способом причастно единому», «необходимо, чтобы нечто объединённое отличалось от единого» и «ничто в отдельности из многого не есть... само множество, и, наоборот, множество не есть каждое в отдельности» [22, с. 29, 31].

Это средневековая и чисто платонистская версия отношения двух сущностей — многого и единого, чем бы эти сущности ни были в глазах средневековых авторов. Её должен был бы защищать и Кантор, если бы он обсуждал парадоксы. Но он в дискуссию (1906-1912) не вступал. За Кантора это сделал Жегалкин, выставив аксиому: никакое «множество не есть элемент самого себя» [20, с. 5].

Подход И.И.Жегалкина не совпадает с no classes theory'ей Рассела. Там классы исключаются вовсе как сущности. Там подход номиналистский. А здесь речь идёт, если можно так выразиться, только о «собственном членстве» для множеств. Это подход платонистский, но с ограничением, которое, на мой взгляд, если и не мягче, чем то, на которое пошёл Рассел, создавая двумя годами позднее свою теорию типов (the Theory of Types), однако более естественно в экстенсиональном контексте.

Тем не менее, аргументов против этой платонистской аксиомы всегда было предостаточно. Во всяком случае, её противники утверждают, что некоторые множества «естественно без колебаний считать собственными элементами» [3, с. 16] или «никто не может запретить нам, рассматривать и такие множества, которые содержат себя в качестве одного из своих элементов» [23, с. 24].

Разумеется, выход не в том, чтобы запрещать. Но если это дело свободного выбора, полезно этот выбор обсудить.

Мне лично цитаты из Прокла говорят о том, что тема универсалий общей теории множеств в её аксиоматическом виде ещё не имеет логического завершения. С чисто платонистской точки зрения Жегалкин прав, убирая квантор «некоторые» и оставляя только квантор «все».

Согласно последовательному платонизму, множество и элемент множества не могут быть тождественны, если их рассматривать как реалии «в себе». Иначе говоря, множество, как множество, и множество, как его элемент, — это две различные вещи, и всякое рассуждение о них, как об одной и той же вещи, является нарушением закона тождества.

По мысли Кантора, множества сами по себе совершенно неопределённы, если не определён их количественный состав. Поэтому, принимая во внимание круг философских идей Кантора, я убеждён, что любое толкование терминов «множество» и «элемент множества» необходимо привести в соответствие и с принципом объёмности, и с принципом тождества.

Канторовская концепция множества требует, на мой взгляд, отличать множество от любого из его элементов в силу индивидуации сущностей. Поэтому исходным должен быть принцип тождества, а не аксиома Жегалкина. Соответственно, решая вопрос о том, является ли некоторое произвольное множество элементом самого себя, необходимо принять следующее условие (во всех нижеследующих формулах значениями переменных являются множества):

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{x} \supset \neg\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

Если мы не сомневаемся в законе тождества, то по контрапозиции естественно заключаем, что $\neg\, x \in x$, или, обобщая по переменной,

$\forall \boldsymbol{x} \neg (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{x})$.

Это формальный аналог аксиомы Жегалкина. Поскольку эта аксиома нам ничего не говорит о связи «членства» и отношения тождества, я перехожу к общему случаю, добавляя к характеристике понятия множества аксиому, которую я называю ***элемент-аксиомой***:

$\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y}\, (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{y} \supset \neg\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y})$.

Выполнимость этой аксиомы экспериментально очевидна для всякого конечного множества. А её перенос на случай бесконечных множеств вполне согласуется с общей интенцией Кантора — применять к бесконечным объектам принципы, справедливые в конечном. В свете элемент-аксиомы я и оцениваю утверждения, вроде цитированного выше: «никто не может запретить нам рассматривать и такие множества, которые содержат себя в качестве одного из своих элементов». Да, никто, кроме принципа тождества.

Из элемент-аксиомы мы легко получаем аксиому (теорему) Жегалкина.

Замечу, что аксиома Жегалкина говорит нам о том, что расселовский класс по существу является универсальным классом, так как

$\forall \boldsymbol{x} \neg (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{x}) \equiv \mu \boldsymbol{x} \neg (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{x}) = 1$,

где μ — оператор абстракции (класса). И это кажется абсолютно естественным, если принять во внимание элемент-аксиому. С точки зрения теологии Прокла это означает, что только расселовский класс является подлинным единым, тогда как все остальные множества причастны ему.

Известно, что формальный аналог парадокса Рассела получается подстановкой из контекстуального определения (аксиомы свёртывания в «идеальном исчислении» Гермеса — Шольца):

$\forall \boldsymbol{y}\, (\boldsymbol{y} \in \mu \boldsymbol{x}\, \mathrm{F}(\boldsymbol{x}) \equiv \mathrm{F}(\boldsymbol{y}))$.

Это определение считается непредикативным, если на подстановку не накладывается никаких ограничений. Однако элемент-аксиома, указывая на то, что понятие «быть собственным элементом» противоречит закону тождества, подсказывает естественное ограничение на подстановку. Иначе говоря, значением предметных переменных в аксиоме свёртывания могут быть любые множества, кроме универсального класса (точнее всех классов расселовского типа). Такой подход согласуется с замечанием Жегалкина, что «для всякого данного, рассматриваемого множества всегда можно указать на одну вещь, которая заведомо не его элемент. Эта вещь — само рассматриваемое множество» [20, с. 4]. Понятно, что этот подход отличается от New foundations («Новых основ») Куайна, где универсальный класс является элементом самого себя[2].

Коль скоро речь идёт об идее ограничений, изложенная выше постановка вопроса, конечно, не нова. В любых аксиоматических системах теории множеств вводятся те или иные ограничения, запрещающие подстановку расселовского класса вместо предметных переменных в аксиоме свёртывания. Но почему-то никто не обращал внимание на два обстоятельства — во-первых, на возможность мыслить расселовский класс как универсальный класс, и, во-вторых, на связь расселовского парадокса с принципом тождества. А ведь именно здесь весьма актуальной представляется мне полемика Лейбница и Кларка по вопросу о принципе тождества неразличимых. Парадокс Рассела вполне согласуется с системой взглядов Кларка, но он несовместим с законом Лейбница. Странно, что Рассел, столь хорошо знакомый с логикой и философией Лейбница, прошёл мимо этого факта.

Кроме того, стоит заметить, что имеется принципиальная разница между понятием множества в его канторовском (или платонистском) смысле, который уточняется элемент-аксиомой, и весьма распространённым толкованием этого понятия в учебниках и монографиях по теории множеств, которые или мало, или вовсе не интересуются философским аспектом канторовского подхода к своей теории. Они довольствуются ссылками на интуицию и мнимой возможностью познакомить читателя с понятием множества «на примерах». Более серьёзные и философствующие авторы (такие, как Борель или Лузин) всегда подчёркивали, что никакие примеры не могут дать идею этого понятия.

Упрощённый взгляд, путающий «множественность» и «множество» (что, между прочим, никогда не позволял себе Рассел), элиминирует предмет разногласий между номинализмом и платонизмом. Номиналисты не отрицают объективного существования множественности вещей и даже допускают теоретическую правомерность абстракции множества, как своего рода способ выражения (*façon de parler*). Но «свёртывание» множественности в единичную и единственную по своей природе сущность — в универсалию номиналисты не признают.

Для самого Рассела такой взгляд стал следствием открытого им парадокса. «Парадокс, касающийся класса классов, которые не являются элементами самих себя разрешается, если мы допустим, что класс всегда должен определяться некоторой пропозициональной функцией» [24, с. 268]. В результате он пришёл (почти параллельно с теоретико-типовой) к no classes theory [25], о которой уже шла речь и согласно которой «символы, означающие классы, — это просто условные знаки, которые не представляют предметы, называемые "классами", так что на самом деле, классы подобны описаниям, они являются логическими функциями, или, как мы также говорим, "неполными символами"» [26, с. 266]. И, сравнивая no classes theory с теорией типов, он добавляет: «Единственно тем, что заставило меня тогда сохранить классы, была техническая трудность — представить без них

[2] Попутно замечу, что в ML Куайна «не-класс» (индивид y) определяется формулой $\forall x\,(x \in y \equiv x = y)$.

предложения элементарной арифметики, трудность, которая мне тогда казалась непреодолимой» [19, с. 629].

На представленную мной аргументацию по устранению парадокса Рассела резонно возразить, что, способствуя частному (одному из возможных) его решению, эта аргументация не решает, вообще говоря, главный вопрос — вопрос о непротиворечивости аксиоматической теории множеств. Это возражение, конечно, справедливо. Как отметил Пауль Бернайс, одним требованием устранить парадоксы, ещё не поставлена какая-либо удовлетворительная программа обоснования математики.

Однако я и не ставлю себе подобной задачи. Моя цель неизмеримо скромней. Это философская проблема аутентичного толкования основного понятия теории множеств на основе теории абстракций. При этом, как будто, не делается никаких допущений, которые не содержались бы в самом понятии «множество», если смотреть на него с точки зрения философии математического платонизма.

Элемент-аксиома — это одна их тех аксиом, которые отсутствуют в составе известных аксиоматических теорий. Это, конечно, жёсткая аксиома. Но она вполне естественна с точки зрения принципа объёмности: если мы утверждаем, что класс полностью определён своими членами, этот класс не может совпадать ни с одним из своих членов. В противном случае мы имели бы обычный порочный круг в виде пресловутой непредикативности [27].

В то же время кажется, что хотя смысл аксиомы объёмности подсказывает необходимые уточнения, эти уточнения явно не просматриваются из самой аксиомы. Вот почему я считаю необходимым дополнить аксиому объёмности элемент-аксиомой, принимая её чисто формально, независимо от того, какую философскую точку зрения мы при этом выбираем. Что же касается платонистской «формулы множества», то я готов присоединиться к замечанию, касающемуся не только её, но и любой другой эмпирически неоспоримой «философской формулы». Если с ней «связан целый комплекс различных соображений», то её «не отбрасывают так легко даже тогда, когда убедились в ошибочности её первоначального смысла; смысл этот пытаются видоизменить так, чтобы им можно было пользоваться и в дальнейшем» [28, с. 55].

ВЫВОДЫ

Традиционно считать, что парадоксы — признак неблагополучия в основных (исходных) посылках (аксиомах, постулатах, абстракциях и пр.) той или иной системы, в которой парадоксы обнаруживаются. Но если под логикой понимать **чистое исчисление** элементарной логики (предикатов первого порядка), то мы не сумеем обнаружить в них ничего парадоксального. Поэтому утверждение, что Рассел «построил противоречие, оставаясь исключительно в рамках элементарной логики» [18, с. 7], нуждается, конечно, в разъяснении. А разъяснение приводит нас к тому, что речь идёт в действительности о ***прикладной логике***, какой является, к примеру, теоретико-множественная логика. Только в прикладной логике мы находим индивидуальные предикаты (помимо тождества) и то, что можно назвать ***гипотезами*** или ***предпосылками***, которые придают доказательствам относительный (условный) характер и которые, в случае обнаружения противоречий, приходится исключать. В чистой логике непротиворечивость аксиом обосновывается абсолютно, а каждая теорема просто доказуема, то есть не зависит ни от каких условий.

Список литературы

1. Гегель Г.В.Ф. Наука логики. Т. 3. - М., 1972. – 373 с.
2. Об абстракциях неразличимости, индивидуации и постоянства // Творческая природа научного познания. - М., 1984. – С. 43-65.
3. Френкель А.А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. - М., 1966. – 453 с.
4. Карри Х. Основания математической логики. - М., 1969. – 529 с.
5. Клини С. К. Математическая логика. - М., 1973. – 446 с.
6. Фор А. Восприятие и распознавание образов. - М., 1989. – 354 с.
7. Acta mathematica. 1906. Т. 30. – 439 с.
8. Borel E. Leçon sur la théorie des fonctions. - Paris, 1928. Note IV. – 322 p.
9. Лузин Н.Н. Собр. соч. - М. 1958. Т. 2. – 274 с.
10. Мартин-Лёф П. Очерки по конструктивной математике. - М.,1975. – 472 с.
11. Skolem Th. Selected in Logic. - Oslo, 1970. – 173 с.
12. Шрейдер Ю.А., Шаров А.А. Системы и модели. - М., 1982. – 399 с.
13. Лейбниц Г.В. Избранные философские сочинения. - М., 1890. – 518 с.
14. Лейбниц Г.В. Соч. Т. 2. - М., 1983. – 632 с.
15. Лейбниц Г.В. Избр. филос. сочинений. - М., 1983. – 459 с.
16. Логика и методология науки. - М., 1967. – 477 с.
17. Кантор Г. Труды по теории множеств. - М., 1985. – 445 с.
18. Нагель Э., Ньюмен Д. Теорема Гёделя. - М., 1970. – 182 с.
19. Russell B. Les paradoxes de la logique // Revue de Métaphysique et de Morale. T. XIV, mai, 1906. – P. 142-158.
20. Жегалкин И.И. Трансфинитные числа. - М., 1903. – 211 с.
21. Dumitriu A. Les condition de la définition // International logic revue. - Bologna, 1970, № 1. – P. 112-143.
22. Прокл. Первоосновы теологии. - Тбилиси, 1972. – 447 с.
23. Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах. - М., 1965. – 284 с.
24. Russell B. La théorie des types logiques // Revue de Métaphysique et de Morale. T. XVIII, №3, 1910. – P. 242-274.
25. Russell B. Principles of Mathematics. - London, 1903. – 583 p.
26. Russell B. Wstęp do filozofii matematyki. - Warszawa, 1958. – 241 p.
27. Непредикативное определение // Философская энциклопедия. - М., т. 4, 1967. – С. 439.
28. Цейтен Г.Г. История математики в древности и в средние века. - М.-Л., 1932. – 451 с.

Посупило в редакцию 15.07.2005